Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математке -

Комбинаторна логика и њена неодлучивост

Ученик:
Младен Пузић IVд

Ментор:
др Зоран Петрић

Београд, јун 2020.

Садржај

1

Увод

Теорија израчунљивости је грана логике која је у поређењу са другим гранама веома млада. Њене основе постављене су са сада већ познатим радовима *Курта Гедела* (1906-1978), *Алонза Черча* (1903-1995) и *Алана Тјуринга* (1912-1954). Овај период, двадесете и тридесете године прошлог века, најбоље показује да се математика не смишља, већ открива. За њихове системе, као и многе касније, се испоставило да представљају исти скуп израчунљивих функција и општеприхваћена *Черч-Тјурингова теза* нам наговештава да је тај скуп исти као и скуп неформално израчунљивих фунцкија (*израчунате папиром и оловком*).

Међутим још пре познатих језика попут *Тјуринговик машина* и *ламбда рачуна*, руски логичар Мојсеј Шејнфинкел (1889-1942) је још 1920. године представио концепт комбинаторне логике, који се касније показао као једнак претходнонаведеним системима. Његов рад је 1927. године открио амерички логичар Хаскел Кари (1900-1982) и концепт комбинаторне логике је развио и популаризовао.

Комбинаторна логика је специфична по томе што њени терми не садрже везане промењљиве, а нама је корисна јер су њена правила једноставна и лако се схватају. У овом раду уводимо систем и откривамо и доказујемо разне његове особине. Рад се завршава доказом да је комбинаторна логика неодлучива, односно да не можемо за било која два њена терма одредити да ли су једнака. Технике које ћемо притом користити су корисне и у другим системима, али их је корисно изучити на комбинаторној логици због њене једноставности.

2

Уводни појмови

2.1 Језик комбинаторне логике

Дефиниција 2.1.1. *Језик* комбинаторне логике је изграђен следећим елементима:

- пребројиво много променљивих: $v_0, v_{00}, v_{000}, \ldots$;
- K и S;
- заграде (и).

Нотација 2.1.1. *Атомима* називамо све променљиве, као и K и S.

Дефиниција 2.1.2. За терме комбинаторне логике, *CL-терме*, важи:

- сви атоми су CL-терми;
- ако су X и Y CL-терми, онда је и (XY) такође CL-терм;
- ништа више није CL-терм.

Нотација 2.1.2. Убудуће ћемо CL-терме звати и само *термима*. Великим словима енглеског алфабета дајемо називе термима, док мала слова користимо за имена променљивих. Користићемо правило леве асоцијативности заграда, тј. $(((XY)U)V)$ ће бити скраћено као $XYUV$ (такође не пишемо спољне заграде, које су углавном непотребне). Терме без променљивих зваћемо *комбинаторима*.

Дефиниција 2.1.3. Дефинишемо релацију *X се појављује у Y*, односно X је *подтерм Y*:

- X се појављује у X;

- ако се X појављује у U или у V, онда се појављује у (UV).

Нотација 2.1.3. X се појављује у Y означавамо са $Y[X]$.

Нотација 2.1.4. Скуп свих променљивих које се појављују у X означавамо са $FV(X)$.

Дефиниција 2.1.4. Са $P[Y/x]$ означавамо резултат замене сваког појављивања x унутар P са Y, односно:

- $x[Y/x] \equiv Y$;
- $a[Y/x] \equiv a$, где $a \not\equiv x$;
- $(UV)[Y/x] \equiv (U[Y/x]V[Y/x])$.

Дефиниција 2.1.5. Са $P[U_1/x_1][U_2/x_2]\ldots[U_n/x_n]$, где важи $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$, означавамо симултану замену свих појављивања x_1 са U_1, x_2 са U_2,..., односно:

- $x_i[U_1/x_1][U_2/x_2]\ldots[U_n/x_n] \equiv U_i$;
- $a[U_1/x_1][U_2/x_2]\ldots[U_n/x_n] \equiv a$, где $a \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$;
- $(UV)[U_1/x_1][U_2/x_2]\ldots[U_n/x_n] \equiv (U[U_1/x_1][U_2/x_2]\ldots[U_n/x_n]V[U_1/x_1][U_2/x_2]\ldots[U_n/x_n])$.

2.2 Редукције

Нотација 2.2.1. Сваки терм облика KXY или $SXYZ$ називамо *редексом.*

Дефиниција 2.2.1. *Контракцијом* редекса у терму U називамо замену једног појављивања

$$KXY \text{ са } X \text{ или } SXYZ \text{ са } XZ(YZ).$$

Нотација 2.2.2. Кажемо да се U *контрахује* на U' (у ознаци $U \rhd^1 U'$) када је U' резултат контракције редекса у терму U.

Нотација 2.2.3. Кажемо да се U *редукује* на V (у ознаци $U \rhd V$) када V можемо добити од U након коначног (могуће празног) низа контракција.

Пример 1. Наћи терм I такав да се терм Ix редукује на x.

Дефиниција 2.2.2. $I \equiv SKK$.

$$SKKx \rhd^1 KX(Kx) \rhd^1 x.$$

Пример 2. Наћи терм B такав да се терм $Bxyz$ редукује на $x(yz)$.

Дефиниција 2.2.3. $B \equiv S(KS)K$.

$$S(KS)Kxyz \triangleright^1 (KS)x(Kx)yz \triangleright^1 S(Kx)yz \triangleright^1 (Kx)z(yz) \triangleright^1 x(yz).$$

Дефиниција 2.2.4. *Нормална форма* је терм који не садржи ниједан редекс.

Нотација 2.2.4. Кажемо да је нормална форма Y *нормална форма од* X када се X редукује на Y.

Лема 2.1. Супституциона лема за $\triangleright$:

(а) $X \triangleright Y \implies FV(X) \supseteq FV(Y)$;

(б) $X \triangleright Y \implies Z[X/v] \triangleright Z[Y/v]$;

(в) $X \triangleright Y \implies X[U_1/x_1][U_2/x_2]\dots[U_n/x_n] \triangleright Y[U_1/x_1][U_2/x_2]\dots[U_n/x_n]$.

Доказ. (а) за све терме X, Y, Z важи $FV(KXY) \supseteq FV(X)$ и $FV(SXYZ) \supseteq FV(XZ(YZ))$;

(б) све контракције које су одрађене да би се од X добио Y могу се урадити и у $Z[X/v]$, у свим новим појављивањима X;

(в) ако је R редекс и контрахује се у T, онда је и $R[U_1/x_1][U_2/x_2]\dots[U_n/x_n]$ редекс и контрахује се у $T[U_1/x_1][U_2/x_2]\dots[U_n/x_n]$.

□

Пример 3. Посматрајмо комбинатор $U \equiv S(K(SI))(SII)$, који ћемо звати *Тјурингов комбинатор.* За њега важи:

$$\begin{array}{rcl}
Uxy & \equiv & S(K(SI))(SII)xy \\
 & \triangleright^1 & (K(SI))x((SII)x)y \\
 & \triangleright^1 & (SI)((SII)x)y \\
 & \triangleright^1 & Iy(((SII)x)y) \\
 & \triangleright^1 & y(((SII)x)y) \\
 & \triangleright^1 & y((Ix(Ix))y) \\
 & \triangleright^1 & y((Ixx)y) \\
 & \triangleright^1 & y((xx)y) \\
 & \equiv & y(xxy)
\end{array}$$

односно

$$Uxy \triangleright y(xxy).$$

2.3 Једнакосни рачун

Поред система редукција, користићемо и *једнакосни рачун* комбинаторне логике, који је задат следећим аксиомама и правилима извођења:

$$X = X$$
$$KXY = X$$
$$SXYZ = XZ(YZ)$$

$$\frac{X = Y}{Y = X}$$

$$\frac{X = Y \qquad Y = Z}{X = Z}$$

$$\frac{X = Y}{XZ = YZ}$$

$$\frac{X = Y}{ZX = ZY}$$

Из ове дефиниције се може видети да ако $X \triangleright Y$, онда и $X = Y$. Обрнуто не мора да важи.

3

Особине комбинаторне логике

3.1 Черч-Росерово својство

Дефиниција 3.1.1. Кажемо да се U *паралелно контрахује* на V (у ознаци $U \triangleright^{1p} V$) када је V резултат контракција скупа међусобно дисјунктних редекса у терму U.

Лема 3.1. (Конфлуенција $\triangleright^{1p}$) Ако за CL-терме U, X и Y важи $U \triangleright^{1p} X$ и $U \triangleright^{1p} Y$, онда постоји CL-терм T такав да:

$$X \triangleright^{1p} T \text{ и } Y \triangleright^{1p} T.$$

Доказ. Користимо индукцију по комплексности терма U.
База: U је атом. Важи $U \equiv X \equiv Y \equiv T$.
Корак: $U \equiv U_1U_2$.

(а) Сви редекси који се користе у паралелној контракцији се налазе или у U_1 или у U_2. Онда важи $X \equiv X_1X_2$ и $Y \equiv Y_1Y_2$, где $U_1 \triangleright^{1p} X_1$, $U_2 \triangleright^{1p} X_2$, $U_1 \triangleright^{1p} Y_1$ и $U_2 \triangleright^{1p} Y_2$. Онда по индуктивној хипотези можемо да узмемо $T \equiv T_1T_2$, где су T_1 и T_2 такви да важи $X_1 \triangleright^{1p} T_1$, $Y_1 \triangleright^{1p} T_1$, $X_2 \triangleright^{1p} T_2$ и $Y_2 \triangleright^{1p} T_2$.

(б) Не важи (а) и важи $U \equiv (KA)B$. Без умањења општости нека буде $X \equiv A$ и $Y \equiv (KA')B'$, где важи $A \triangleright^{1p} A'$ и $B \triangleright^{1p} B'$. Можемо да узмемо $T \equiv A'$.

(в) Не важи (а) и важи $U \equiv ((SA)B)C$. Без умањења општости нека буде $X \equiv AC(BC)$ и $Y \equiv ((SA')B')C'$, где важи $A \triangleright^{1p} A'$, $B \triangleright^{1p} B'$ и $C \triangleright^{1p} C'$. Можемо да узмемо $T \equiv A'C'(B'C')$.

$\square$

Теорема 3.1. (Черч-Росерова теорема за $\triangleright$) Ако за CL-терме U, X и Y важи $U \triangleright X$ и $U \triangleright Y$, онда постоји CL-терм T такав да:

$$X \triangleright T \text{ и } Y \triangleright T.$$

Доказ. Доказ теореме следи директно из претходне леме и дефиниције паралелних контракција. Сваку $\triangleright^{1p}$ контракцију заменимо са више $\triangleright^{1}$ контракција. $\square$

Последица 1. CL-терм може да има највише једну нормалну форму.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји терм који има две различите нормалне форме, онда по Черч-Росеровој теореми постоји терм T на који се обе нормалне форме редукују, по претпоставци то значи да се макар једна нормална форма мења, то јест има редекс, што је у контрадикцији са тиме да је нормална форма. $\square$

Последица 2. Комбинаторна логика је *конзистентна*, односно, постоје терми који се не редукују један на други, тј. нису једнаки.

Доказ. Ако постоје две различите нормалне форме, тврђење очигледно важи. Узмимо терме K и S. $\square$

3.2 Комплетност комбинаторне логике

Дефиниција 3.2.1. За сваку промењиву x дефинишемо операцију $[x].$ која сваком терму M додељује терм на следећи начин:

1. $[x].M \equiv I$, када $M \equiv x$;
2. $[x].M \equiv KM$, када $x \notin FV(M)$;
3. $[x].M \equiv U$, када $M \equiv Ux, x \notin FV(U)$;
4. $[x].M \equiv S([x].U)([x].V)$, када $M \equiv UV$ и не важи ни 2. ни 3.

Израз $[x].M$ није део синтаксе комбинаторне логике, већ је само име терма који дефинишемо. Ову операцију називамо *апстракцијом* над M.

Теорема 3.2. $FV([x].M) = FV(M) - \{x\}$.

Доказ. Користимо индукцију по комплексности терма M.
База:

(a) $M \equiv x$, $FV([x].M) = FV(I) = \{\} = \{x\} - \{x\}$;

(б) M је атом и $M \not\equiv x$, $FV([x].M) = FV(KM) = FV(M) = FV(M) - \{x\}$.

Корак: $M \equiv UV$, по индуктивној хипотези важи $FV([x].U) = FV(U) - \{x\}$ и $FV([x].V) = FV(V) - \{x\}$,

(а) $x \notin FV(M)$, као случај (б) базе;

(б) $V \equiv x$, $x \notin FV(U)$, $FV([x].M) = FV(U) = FV(Ux) - \{x\}$;

(в) у супротном,

$$\begin{array}{rcl} FV([x].M) & = & FV(S([x].U)([x].V)) \\ & = & FV(S) \cup FV([x].U) \cup FV([x].V) \\ & = & FV(U) \cup FV(V) - \{x\} \\ & = & FV(UV) - \{x\}. \end{array}$$

□

Теорема 3.3. $([x].M)N \rhd M[N/x]$.

Доказ. По леми 2.1.в и теореми 3.2 следи да је довољно доказати $([x].M)x \rhd M$, јер тада важи $([x].M)N \equiv (([x].M)x)[N/x] \rhd M[N/x]$. Доказаћемо $([x].M)x \rhd M$ индукцијом по комплексности терма M.

База:

(а) $M \equiv x$, тада $([x].x)x \equiv Ix \rhd x \equiv M$;

(б) M је атом и $M \not\equiv x$. Тада $([x].M)x \equiv KMx \rhd^1 M$.

Корак: $M \equiv UV$, по индуктивној хипотези $([x].U)x \rhd U$ и $([x].V)x \rhd V$,

(а) $x \notin FV(M)$, као случај (б) базе;

(б) $x \notin FV(U)$, $V \equiv x$: $([x].Ux)x \equiv Ux \equiv M$;

(в) Ниједан претходни случај не важи,

$$\begin{array}{rcl} ([x].M)x & \equiv & S([x].U)([x].V)x \\ & \rhd^1 & ([x].U)x(([x].V)x) \\ & \rhd & UV \\ & \equiv & M. \end{array}$$

□

Дефиниција 3.2.2. За променљиве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дефинишемо:

$$[x_1, \ldots, x_n].M \equiv [x_1].([x_2].(\ldots([x_n].M)\ldots)).$$

Теорема 3.4. За међусобно различите $x_1, \dots, x_n$ важи:

$$([x_1, \dots, x_n].M)U_1 \dots U_n \triangleright M[U_1/x_1] \dots [U_n/x_n].$$

Доказ. Индуктивна примена теореме 3.3. $\square$

Теорема 3.5. (Комбинаторна комплетност) За сваки терм V за који важи $FV(V) = \{x_1, \dots, x_n\}$ постоји комбинатор M такав да:

$$MU_1 \dots U_n \triangleright V[U_1/x_1] \dots [U_n/x_n].$$

Доказ. Узмимо $M \equiv [x_1, \dots, x_n].V$. Из теореме 3.4 следи $([x_1, \dots, x_n].V)U_1 \dots U_n \triangleright V[U_1/x_1] \dots [U_n/x_n]$. Потребно је само још доказати да је $[x_1, \dots, x_n].V$ комбинатор што следи из теореме 3.2 и чињенице да $FV(V) = \{x_1, \dots, x_n\}$. $\square$

Пример 4. Дефинисати комбинатор A такав да $Ax = x(xxx)x$. По претходном доказу узмимо:

$$\begin{aligned} A &\equiv [x].x(xxx)x \\ &= S([x].x(xxx))I \\ &= S(SI(S([x].xx)I))I \\ &= S(SI(S(SII)I))I. \end{aligned}$$

3.3 Теорема о фиксној тачки

Теорема 3.6. (Теорема о фиксној тачки): За сваки терм X постоји терм Y тако да $XY = Y$ и $Y \triangleright XY$.

Доказ. За дати терм X конструисаћемо Y. Користимо комбинатор U, уведеног у примеру 2. Узмимо $Y \equiv UUX$. Комбинатор UU се другачије означава и са Θ, а зове се *комбинатор фиксне тачке.* Важи $UUX \triangleright X(UUX)$, односно $Y \triangleright XY$, па важи и $XY = Y$. $\square$

Последица 3. Једначину облика

$$xx_1x_2 \dots x_n = Z$$

за међусобно различите $x_1, \dots, x_n$, увек можемо решити по промењљивој x, односно можемо наћи терм A такав да важи

$$Ax_1x_2 \dots x_n = Z[A/x].$$

Доказ. Означимо са A' апстракцију десне стране ове једначине редом по промењљивим $x_n, \dots, x_1, x$, односно $A' \equiv [xx_1x_2 \dots x_n].Z$. Решење једначине је $A \equiv UUA'$:

$$\begin{array}{rcll} Ax_1\dots x_n & \equiv & UUA'x_1\dots x_n & \\ & = & A'(UUA')x_1\dots x_n, & \text{по теореми о фиксној тачки} \\ & = & ([xx_1\dots x_n].Z)Ax_1\dots x_n & \\ & = & Z[A/x], & \text{по теореми 3.4.} \end{array}$$

□

Пример 5. Решити једначину $yx = x(yx)$ по y. По претходном доказу:

$$\begin{array}{rcl} y & \equiv & UU([yx].x(yx)) \\ & = & UU([y].([x].x(yx))) \\ & = & UU([y].(SI([x].yx)) \\ & = & UU([y].(SIy)) \\ & = & UU(SI). \end{array}$$

3.4 Исказна логика и аритметика

Комбинаторна логика је довољно богата да се у њу може *утопити* исказна логика и аритметика.

Дефиниција 3.4.1. Дефинишемо комбинаторе t ($true$) и f ($false$):

$$t \equiv K;$$

$$f \equiv KI.$$

Из ових дефиниција се јасно види $txy \triangleright x$ и $fxy \triangleright y$.

Дефиниција 3.4.2. Комбинатор *негације*, односно комбинатор n такав да

$$nt = f \text{ и } nf = t,$$

дефинишемо као решење једначине $nx = xft$.

Дефиниција 3.4.3. Комбинатор *дисјункције*, односно комбинатор $\bigvee$ такав да

$$\bigvee tt = \bigvee tf = \bigvee ft = t \text{ и } \bigvee ff = f,$$

дефинишемо као решење једначине $\bigvee xy = xty$.

Дефиниција 3.4.4. Комбинатор *конјукције*, односно комбинатор $\bigwedge$ такав да

$$\bigwedge tt = t \text{ и } \bigwedge ff = \bigwedge ft = \bigwedge tf = f,$$

дефинишемо као решење једначине $\bigwedge xy = xyf$.

Комбинаторе за импликацију, еквиваленцију и ексклузивну дисјункцију могуће је дефинисати на сличан начин.

Сад желимо да дефинишемо природне бројеве унутар CL, почевши од 0. Терм који представља број n означићемо са $\overline{n}$.

Дефиниција 3.4.5. $\overline{0} \equiv I$.

Да бисмо дефинисали остале природне бројеве, потребан нам је комбинатор следбеника који ћемо означити са σ.

Дефиниција 3.4.6. $\sigma \equiv Vf$, где је V комбинатор такав да $Vxyz \triangleright zxy$.

Сад можемо да индуктивно дефинишемо остале природне бројеве:

Дефиниција 3.4.7. $\overline{n+1} \equiv \sigma\overline{n}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Биће нам потребно још помоћних комбинатора за аритменику:

Дефиниција 3.4.8. Комбинатор *претходника*, односно комбинатор P такав да

$$P\overline{n+1} = \overline{n}, n \in \mathbb{N},$$

дефинишемо као решење једначине $Px = xf$.

Дефиниција 3.4.9. Комбинатор *провере нуле*, односно комбинатор Z такав да

$$Z\overline{0} = t \text{ и } Z\overline{n+1} = f,$$

дефинишемо као решење једначине $Zx = xt$.

Дефиниција 3.4.10. Комбинатор *сабирања*, односно комбинатор $\oplus$ такав да

$$\oplus\ \overline{n}\ \overline{m} = \overline{n+m},$$

дефинишемо као решење једначине $\oplus xy = Zyx(\sigma(\oplus x(Py)))$.

Дефиниција 3.4.11. Комбинатор *множења*, односно комбинатор $\otimes$ такав да

$$\otimes\ \overline{n}\ \overline{m} = \overline{n \cdot m},$$

дефинишемо као решење једначине $\otimes xy = Zy\overline{0}(\oplus(\otimes x(Py))x)$.

Дефиниција 3.4.12. Комбинатор *степеновања*, односно комбинатор E такав да

$$E\ \overline{n}\ \overline{m} = \overline{n^m},$$

дефинишемо као решење једначине $Exy = Zy\overline{1}(\otimes(\odot x(Py))x)$.

4

Неодлучивост комбинаторне логике

4.1 Предикатски комбинатори и рекурзивни скупови

Неодлучивост комбинаторне логике представља чињеницу да је немогуће наћи поступак који ће одредити да ли су нека два произвољна терма X и Y једнака унутар једнакосног рачуна CL. Прво морамо увести неколико појмова:

Дефиниција 4.1.1. Предикатски комбинатор је сваки комбинатор A такав да за сваки природни број n важи или $A\overline{n} = t$ или $A\overline{n} = f$.

Дефиниција 4.1.2. Рекурзиван скуп је сваки скуп $S \subseteq \mathbb{N}$ за који постоји предикатски комбинатор A такав да:

$$A\overline{n} = \begin{cases} t, & n \in S \\ f, & n \notin S \end{cases}$$

Нотација 4.1.1. Комбинатор A називамо *карактеристичним* комбинатором скупа S.
Потребно нам је неколико додатних комбинатора за касније доказе:

Дефиниција 4.1.3. Комбинатор *веће*, односно комбинатор G такав да

$$G\ \overline{n}\ \overline{m} = \overline{1}, n > m \text{ и } G\ \overline{n}\ \overline{m} = \overline{0}, n \leq m$$

дефинишемо као решење једначине $Gxy = Zx\overline{0}(Zy\overline{1}(G(Px)(Py)))$.

Дефиниција 4.1.4. Комбинатор *дужине броја*, односно комбинатор L такав да

$$L\overline{n} = \overline{m},$$

где је m број цифара n у декадном запису, дефинишемо као $L \equiv T\overline{0}$, где је T решење једначине $Txy = Z(G(E\overline{10}x)y)x(T(\sigma x)y)$.

Дефиниција 4.1.5. Комбинатор *надовезивања*, односно комбинатор $\circledast$ такав да

$$\circledast\ \overline{n}\ \overline{m} = \overline{n * m},$$

где је $*$ операција надовезивања природних бројева, дефинишемо као решење једначине $\circledast xy = \oplus(\otimes x(E\overline{10}(Ly)))y$.

Нотација 4.1.2. За неки скуп $S \subseteq \mathbb{N}$, скуп $\mathbb{N} - S$ називамо његовим комплементом и означавамо са S'.

Лема 4.1. Ако је скуп S рекурзиван, онда је и његов комплемент рекурзиван скуп.

Доказ. Користићемо комбинаторе B и n које смо раније дефинисали ($Bxyz \triangleright x(yz)$, n негација од t и f). Означимо са A карактеристични комбинатор скупа S. Онда је комбинатор BnA карактеристичан за скуп S'.

$$BnA\overline{n} \triangleright^1 n(A\overline{n})$$

Он даје супротан одговор од комбинатора A, што је потребно да би био одговарајући комбинатор. □

4.2 Доказ неодлучивости

За овај доказ ћемо посматрати једноставнију верзију комбинаторне логике, коју ћемо звати CL^-. То је комбинаторна логика из које ћемо изоставити све променљиве, односно једини карактери су $S, K, =, ($ и $)$. Јасно је да ако је CL^- неодлучив онда је и CL.

Користићемо индуктивно дефинисано пресликавање између CL^--терама и природних бројева које се назива Геделово кодирање, по познатном логичару Курту Геделу. Као ознаку за ово пресликавање користићемо Γ и како бисмо разликовали од обичних заграда, аргумент пресликавања ћемо стављати у угласте заграде. Наиме, то пресликавање функционише тако што атом заменимо одговарајућом цифром:

x	S	K	$($	$)$	$=$
$\Gamma[x]$	1	2	3	4	5

За комплексније CL^{-}-терме дефинишемо и да Γ пролази кроз надовезивање:

$$\Gamma[A * B] = \Gamma[A] * \Gamma[B].$$

Пример 6. $\Gamma[I] = \Gamma[((SK)K)] = 3312424$.

Лема 4.2. Ако је скуп S рекурзиван онда је рекурзиван и скуп

$$S^* = \{n \in \mathbb{N} \mid n * 52 \in S\}.$$

Доказ. Пошто је S рекурзиван скуп, има карактеристичан комбинатор, који ћемо назвати A. Комбинатор $A^* \equiv [x].A(\circledast\ x\ \overline{52})$ је карактеристичан за скуп S^*, јер важи $A^*\overline{n} = A(\circledast\ \overline{n}\ \overline{52})$. □

Оно што можемо приметити јесте да је $\Gamma[= t] = 52$ (јер $t \equiv K$), што нам помаже да боље разумемо интуицију иза претходне леме. Питање одлучивости CL ћемо формално дефинисати као одређивање рекурзивности следећег скупа:

Дефиниција 4.2.1. $\mathcal{T} = \{\Gamma[X = Y] \mid \vdash_{CL} X = Y\}$.

Када би скуп $\mathcal{T}$ био рекурзиван, онда бисмо имали методу да проверимо да ли су нека два CL-терма X и Y једнака, што би значило да је комбинаторна логика одлучива.

Дефиниција 4.2.2. $\ulcorner X \urcorner \equiv \overline{\Gamma[X]}$, за сваки CL-терм X.

Дефиниција 4.2.3. $n^{\#} \equiv \Gamma[\overline{n}]$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 4.2.4. Комбинатор Σ такав да важи

$$\Sigma\overline{n} = \overline{3 * s * n * 4},$$

где је $s = \Gamma[(Vf)]$, дефинишемо као решење једначине $\Sigma x = B(C \circledast \overline{4})(\circledast\overline{3 * s})x$, где су комбинатори B и C такви да важи $Bxyz = x(yz)$ и $Cxyz = xzy$.

Оно што је битно код овог комбинатора, а може се лако проверити, јесте да важи $\Sigma\overline{n^{\#}} = \overline{(n+1)^{\#}}$, односно функционише слично комбинатору следбеника.

Дефиниција 4.2.5. Комбинатор δ такав да важи

$$\delta\overline{n} = \overline{n^{\#}}$$

дефинишемо као решење једначине $\delta x = Zx\overline{0^{\#}}(\Sigma(\delta(Px)))$.

Дефиниција 4.2.6. Комбинатор Δ такав да важи

$$\Delta\overline{n} = \overline{n * n^{\#}}$$

дефинишемо као решење једначине $\Delta x = \circledast x(\delta x)$.

Оно што је битно напоменути за комбинатор Δ, што се лако показује, јесте да важи:

$$\Delta\ulcorner X\urcorner = \ulcorner X\ulcorner X\urcorner\urcorner.$$

Теорема 4.2.1. (**Друга теорема о фиксној тачки**) За сваки CL-терм A постоји CL-терм X такав да важи $A\ulcorner X\urcorner = X$.

Доказ. Узмимо $X = BA\Delta\ulcorner BA\Delta\urcorner = A(\Delta\ulcorner BA\Delta\urcorner) = A\ulcorner BA\Delta\ulcorner BA\Delta\urcorner\urcorner = A\ulcorner X\urcorner$. □

Нотација 4.2.1. Кажемо да рекурзиван скуп S *тестира* CL-једнакост $X = Y$ када важи:

$$\vdash_{CL} X = Y \text{ акко } \Gamma[X = Y] \in S.$$

Теорема 4.2.2. Сваки рекурзиван скуп тестира макар једну CL-једнакост.

Доказ. Узмимо $S^* = \{n \in \mathbb{N} \mid n * 52 \in S\}$ и A^*, његов карактеристичан комбинатор (по леми 4.2). Узмимо X такво да $A^*\ulcorner X\urcorner = X$, које постоји по другој теореми о фиксној тачки. Докажимо да скуп S тестира једнакост $\vdash_{CL} X = t$:

$$\begin{array}{llll}
\vdash_{CL} X = t & \Leftrightarrow & \vdash_{CL} A^*\ulcorner X\urcorner, & \text{по изабраном } X \\
 & \Leftrightarrow & \vdash_{CL} A^*\overline{\Gamma[X]}, & \text{по дефиницији } \ulcorner X\urcorner \\
 & \Leftrightarrow & \Gamma[X] \in S^*, & \text{по томе што је } A^* \text{ карактеристичан за } S^* \\
 & \Leftrightarrow & \Gamma[X] * 52 \in S, & \text{по дефиницији } S^* \\
 & \Leftrightarrow & \Gamma[X] * \Gamma[= t] \in S, & \text{по Геделовом кодирању} \\
 & \Leftrightarrow & \Gamma[X = t] \in S. &
\end{array}$$

□

Теорема 4.2.3. Скуп $\mathcal{T}$ није рекурзиван.

Доказ. Претпоставимо да је скуп $\mathcal{T}$ рекурзиван. Онда је и његов комплемент рекурзиван, по леми 4.1. Скуп $\mathcal{T}$ је дефинисан као скуп који тестира све једнакости комбинаторне логике, што би значило да његов комплемент не тестира ниједну. Тиме бисмо нашли рекурзиван скуп који не тестира ниједну једнакост, што је у контрадикцији са теоремом 4.2.2. Тиме смо доказали да је комбинаторна логика неодлучива. □

5

Закључак

С обзиром да ова тема не личи ни на шта што се учи по плану средње школе, покушао сам да је представим од самог почетка. Срећом, комбинаторна логика је врло самостална и не захтева превише знања из других грана математике. И поред тога, технике које су коришћене у неким доказима у овом раду врло су корисне и у другим областима и системима и зато ми је драго што сам их показао у једном релативно једноставном једнакосном рачуну попут комбинаторне логике. Конкретно, методе Геделовог кодирања и рекурзивних скупова се користе често у теорији израчунљивости укључујући у неким важним Геделовим доказима.

Даље истраживање комбинаторне логике би посматрало његов однос са другим системима попут ламбда рачуна, али и много других корисних својстава које овај систем поседује.

Хтео бих ову прилику да искористим да се захвалим људима без којих овог рада не би било. За првобитно упознавање са овом граном математике преко њихових предавања о Кари-Хауардовој кореспонденцији и ламбда рачуну, хтео бих да се захвалим Андреју Ивашковићу, студенту докторских студија на Универзитету у Кембрицу и др Томасу Пиехи, професору математике на Универзитету у Тибингену.

Посебну захвалност имам према свом ментору, професору др Зорану Петрићу, који ме већ годинама подржава у истраживању ове и њој сличних тема. Његов курс из ламбда рачуна и комбинаторне логике био је неопходан да уопште будем у прилици да почнем овај рад. Када сам почео, увек је био ту да пружи било какво додатно објашњење или предлог.

Литература

[1] J.R. Hindley, J.P. Seldin, *Lambda-calculus and combinators*, Cambridge University Press, Кембриџ, 2008.

[2] `http://www.mi.sanu.ac.rs/~zpetric/lambda-uvod.pdf`

[3] `https://plato.stanford.edu/entries/logic-combinatory/`